Bestimmung von Definitionsmengen an ausgewählten Beispielen

H. Baier

$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+16}}$

$f : x \mapsto \frac{23}{x^2+5x+6}$

$f : x \mapsto \frac{45}{\sqrt{x^2-9}}$

$f : x \mapsto \frac{67}{\sqrt{\pi \cdot \lg(x)}}$

$f : x \mapsto \frac{1011}{\cos(x-4)}$

$f : x \mapsto \frac{1213}{1-\cos^2(2x)}$

Vorbereitet: October 1, 2006

ASG Erlangen
Präsentiert: 2. 10. 2006

Beispiel 1: $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+16}}$

- $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
- Begründung:
  - Es handelt sich um eine Verschachtelung dreier Funktionen:
    - Der innerste Funktionsterm (dessen Werte man zuerst ausrechnet) ist $x^2 + 8x + 16$, der bereitet keine Schwierigkeiten!
    - Die nächste Funktion von innen nach außen gesehen ist die Wurzelfunktion: $x \mapsto \sqrt{x}$. Unter der Wurzel dürfen bekanntlich nur positive Zahlen einschließlich der Null eingesetzt werden. Daraus resultiert zunächst die Bedingung: $x^2 + 8x + 16 \geq 0$ Diese ist stets erfüllt!
    - Bis hierher hätte man als Definitionsmenge $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R}$ angeben können!
    - Aber nun kommt die äußerste Funktion ins Spiel: $x \mapsto x^{-1}$. Sie sorgt dafür, dass obige Wurzelfunktion nun im Nenner steht! Wir erhalten also (Division durch Null ist nicht erlaubt!) die entscheidende Bedingung: $\sqrt{x^2 + 8x + 16} > 0$

- Dies hat zur Folge, dass wir die Nullstelle der Wurzelfunktion aus der Definitionsmenge ausschließen müssen!
- Wann gilt $\sqrt{x^2+8x+16} = 0$? Na wenn $x^2+8x+16 = 0$ und dies ist bei $x_0 = -4$ der Fall!

Beispiel 2: $f : x \mapsto \frac{23}{x^2+5x+6}$

- ☆ $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$
- ☆ Begründung:
  - ♦ Der Nenner darf nicht Null werden. Also muss man die Nullstellen des Nenners suchen, um diese später auszuschließen!
  - ♦ Nach dem Satz von Vieta? folgt: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$
  - ♦ Also sind $x_1 = -2$ und $x_2 = -3$ die gesuchten Nullstellen, die wir in der Definitionsmenge ausschließen müssen.

Beispiel 3: $f: x \mapsto \frac{45}{\sqrt{x^2-9}}$

- $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R} \setminus [-3;3] =]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$
- Begründung:
- Der innerste Funktionsterm $x^2 - 9$ bereitet wie bei Beispiel 1 keine Schwierigkeiten!
- Die nächste Funktion von innen nach außen gesehen ist die Wurzelfunktion: $x \mapsto \sqrt{x}$. Unter der Wurzel dürfen bekanntlich nur positive Zahlen einschließlich der Null eingesetzt werden. Daraus resultiert zunächst die Bedingung: $x^2 - 9 \geq 0$.
  - Aus $x^2 - 9 \geq 0$ folgt $x^2 \geq 9$ und damit $|x| \geq 3$. Dies kann man sich algebraisch ? oder grafisch ? klar machen!
  - Bis hierher hätten wir also $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R} \setminus]-3;3[$
- Aber nun kommt die äußerste Funktion ins Spiel: $x \mapsto x^{-1}$. Sie sorgt dafür, dass obige Wurzelfunktion nun im Nenner steht! Wir erhalten also (Division durch Null ist nicht erlaubt!) die entscheidene Bedingung: $\sqrt{x^2-9} > 0$ d.h. $x^2 - 9 > 0$
  - Wir müssen zusätzlich die Nullstellen des Nenners ausschließen und damit die Nullstellen von $x^2 - 9$!
  - Also folgt: $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R} \setminus [-3;3]$

Beispiel 4: $f : x \mapsto \frac{67}{\sqrt{\pi \cdot \lg(x)}}$

- Aus den gleichen Gründen wie bei den vorherigen Beispielen lautet die entscheidende Bedingung zur Bestimmung der Definitionsmenge: $\lg(x) > 0$
- Vom Graphen der Logarithmusfunktion schließt man:
- $\mathbb{D}_{max} =]1; +\infty[$

Beispiel 5: $f : x \mapsto \frac{1011}{\cos(x-4)}$

- Bedingung: $\cos(x-4) > 0$
- Bekanntlich besitzt die Cosinusfunktion $f : x \mapsto \cos(x)$ ihre Nullstellen bei $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}$
- Bei der Funktion $f : x \mapsto \cos(x-4)$ verschiebt sich der Graph um 4 Einheiten nach rechts.
- Also verschieben sich auch die Nullstellen um 4 Einheiten nach rechts: $\Rightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi + 4; k \in \mathbb{Z}$
- und damit $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi + 4; k \in \mathbb{Z}\}$

Beispiel 6: $f(x) = \frac{1213}{1-\cos^2(2x)}$

- Hier muss man zunächst mit Hilfe des Trigonometrischen Pythagoras den Nenner umformen:
  - $1 - \cos^2(2x) = \sin^2(2x)$
  - Damit lautet unsere Bedingung: $\sin^2(2x) \neq 0 \Rightarrow \sin(2x) \neq 0$
- Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen bei $x_k = k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}$ besitzt
- findet man die Nullstellen von $\sin(2x)$ über den Ansatz: $2x = k\cdot\pi; k \in \mathbb{Z}$
- $\Rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
- und damit $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$